10.2.3 Derivace elementárních funkcí I

Předpoklady: 10202

Shrnutí z minulé hodiny:
Chceme znát jakým způsobem se mění hodnoty funkce $y = f(x)$ v bodě x_0.

přibližná hodnota změny $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

přesnost výpočtu se bude zvětšovat, když se Δx bude zmenšovat $\Rightarrow$ nekonečně přesný výsledek: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ = **derivace funkce *f* v bodě x_0.**

Definice:
Je dána funkce *f* definovaná v jistém okolí bodu x_0. Existuje-li vlastní limita $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nazýváme ji derivací funkce *f* v bodě x_0 a značíme ji symbolem $f'(x_0)$.

Různé druhy zápisu:

- $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ - náš základní zápis
- $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (protože platí $\Delta x = x - x_0$)
- $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (protože platí $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$)

Poznámka: Často se také používá zápis $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, kde dy a dx označují nekonečně malé změny proměnných *y* a *x*.

Př. 1: Urči derivaci funkce $y = x^2$ v bodě x_0.

Dosadíme do vzorce:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

U předchozí příkladu jsme počítali derivaci v obecném bodě x_0, nedosazovali jsme konkrétní čísla. Získali jsme tak obecný vztah, do kterého můžeme za x_0 dosazovat konkrétní čísla, která nás zajímají.

Př. 2: Urči podle předchozího vztahu derivace funkce $y = x^2$ v bodech $-2;0,1,3$. Porovnej výsledky s grafem funkce $y = x^2$.

Stačí dosazovat do vztahu $f'(x_0) = 2x_0$:

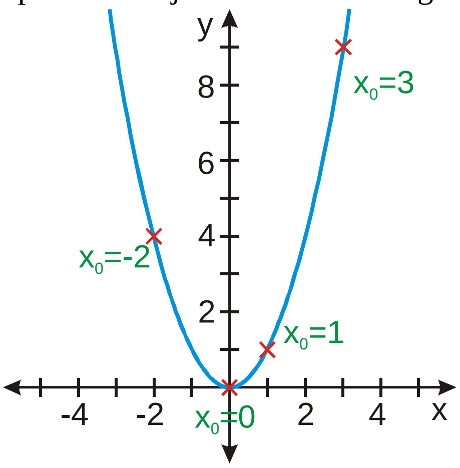
$x_0 = -2$: $f'(-2) = 2(-2) = -4 \Rightarrow$ funkce $y = x^2$ v bodě −2 klesá

$x_0 = 0$: $f'(0) = 2(0) = 0 \Rightarrow$ funkce $y = x^2$ v bodě 0 neklesá ani neroste

$x_0 = 1$: $f'(1) = 2(1) = 2 \Rightarrow$ funkce $y = x^2$ v bodě 1 roste

$x_0 = 3$: $f'(3) = 2(3) = 6 \Rightarrow$ funkce $y = x^2$ v bodě 3 roste více než v bodě 1

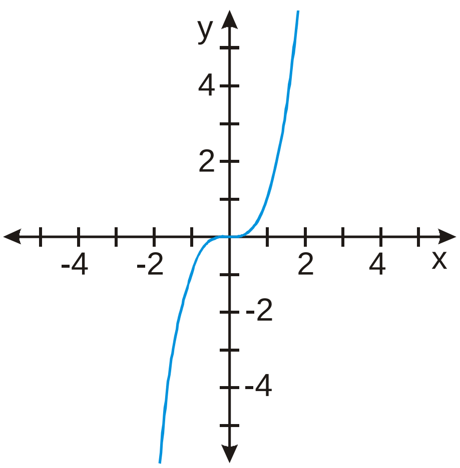
Spočtené údaje dobře souhlasí s grafem:



Na výraz $2x_0$, do kterého jsme dosazovali při výpočtech derivací v bodě se můžeme dívat jako na předpis funkce, jejíž hodnoty udávají hodnotu derivace v bodě. Takovou funkci značíme y' nebo $f'(x)$ a mluvíme o ní jako o derivaci funkce *y*.

Funkce $y' = f'(x)$ může mít opět derivaci. Této funkci pak říkáme **druhá derivace funkce** $y = f(x)$ a značíme ji $y'' = f''(x)$.

Př. 3: Načrtni graf funkce $y = x^3$ a odhadni velikost její derivace v bodě 0. Poté vypočti tuto derivaci pomocí vzorce.

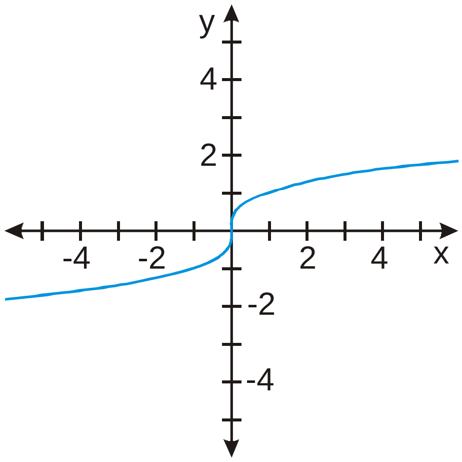


Kolem nuly je graf funkce vodorovný $\Rightarrow$ mělo by platit $f'(0) = 0$.

Dosadíme do vzorce:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^3-0^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^2=0$$

Př. 4: Načrtni graf funkce $y=\sqrt[3]{x}$ (s definičním oborem *R*) a odhadni velikost její derivace v bodě 0. Poté vypočti tuto derivaci pomocí vzorce.



Kolem nuly je graf funkce svislý $\Rightarrow$ mělo by platit $f'(0)=+\infty$ (v okolí nuly je funkce rostoucí a tedy s kladnou derivací).

Dosadíme do vzorce:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty$$

Předchozí derivace je příkladem nevlastní derivace funkce v bodě.

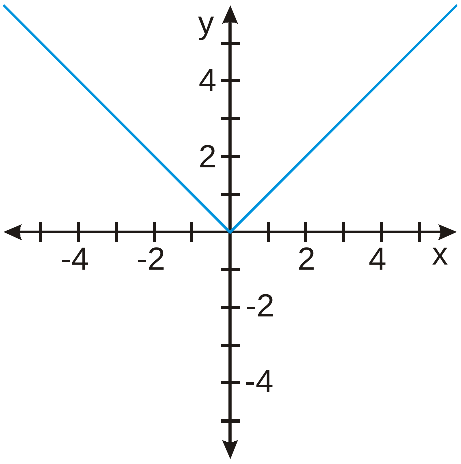
Stejně jako u spojitosti můžeme definovat jednostranné derivace funkce v bodě:
Nechť funkce *f* je definována v jistém levém, resp. pravém okolí bodu x_0.

- **Existuje-li** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ **nazýváme ji derivací funkce *f* v bodě x_0 zleva.**
- **Existuje-li** $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ **nazýváme ji derivací funkce *f* v bodě x_0 zprava.**

Podobně jako u spojitosti definujeme derivace v intervalu:
Funkce *f* má v intervalu $(a;b)$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x\in(a;b)$.
Funkce *f* má v intervalu $\langle a;b\rangle$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x\in(a;b)$ a v bodě *a* má derivaci zprava a v bodě *b* má derivaci zleva.

Existence derivace souvisí se spojitostí funkce:
Má-li funkce *f* v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Př. 5: Na obrázku grafu funkce $y=|x|$ demonstruj, že neplatí věta: „Je-li funkce *f* v bodě x_0 spojitá, má v tomto bodě derivaci“ (obrácená k větě předcházející).

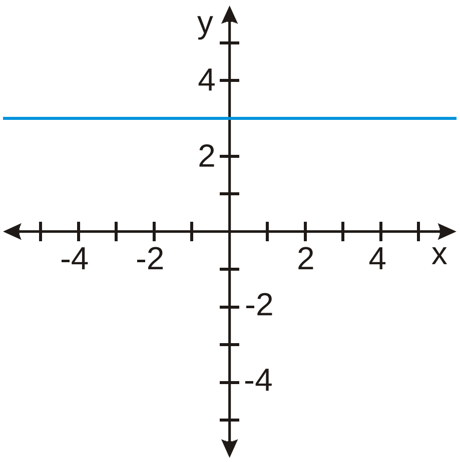


Neplatnost věty vyplývá ze situace v okolí bodu 0. V bodě 0 je funkce spojitá, ale nemá derivace, protože sklon z obou stran je různý a jednostranné derivace se sobě nerovnají.

Teď začneme hledat vzorce pro derivace jednotlivých funkcí.

Pedagogická poznámka: Největší problém ve všech následujících příkladech nedělá studentům dosazení do limity pro derivaci nebo její výpočet, ale dosazení do předpisu funkce a výpočet výrazů $f(x_0+\Delta x)$ a $f(x_0)$.

Př. 6: Nakresli graf libovolné konstantní funkce $y=c$. Podle grafu odhadni funkci, která je její derivací. Urči tuto funkci pomocí vzorce pro výpočet derivace v bodě.



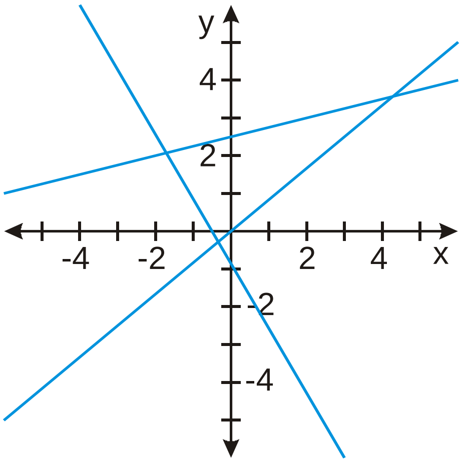
Hodnoty funkce se nemění $\Rightarrow$ derivace by měla být nulová (funkce $y=0$)

$f(x_0+\Delta x)=c$

$f(x_0)=c$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

Př. 7: Nakresli graf několika různých lineárních funkcí $y = ax + b$. Podle grafu odhadni jaké vlastnosti musí mít funkce, která je její derivací. Urči tuto funkci pomocí vzorce pro výpočet derivace v bodě.



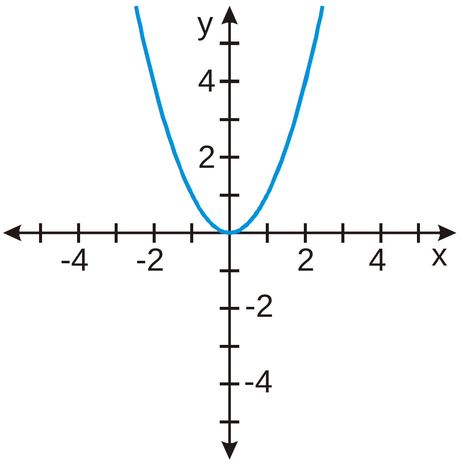
Hodnoty funkce se mění, změna závisí na parametru *a* (určuje sklon přímky) $\Rightarrow$ derivace by měla záviset na *a* a neměla by záviset na *x* (sklon přímky je všude stejný)

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

$$f(x_0 + \Delta x) = a(x_0 + \Delta x) + b$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

Př. 8: Nakresli graf kvadratické funkce $y = x^2$. Podle grafu odhadni jaké vlastnosti musí mít funkce, která je její derivací.. Urči tuto funkci pomocí vzorce pro výpočet derivace v bodě.



Pro záporná *x* hodnoty funkce klesají ($\Rightarrow$ záporné hodnoty derivace)
Pro kladná *x* hodnoty funkce rostou ($\Rightarrow$ kladné hodnoty derivace)
$\Rightarrow$ derivace se mění a měla by být závislá na bodě x_0

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0) = x_0^2$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x_0+\Delta x=2x_0$$

$\Rightarrow$ derivací funkce $y=x^2$ je funkce $y=2x$

Př. 9: Petáková:
strana 155/cvičení 17 f_3, f_8, f_{10}
strana 155/cvičení 17 g_2, f_8

Shrnutí: